

# 山形大学紀要

(自然科学)

第18巻 第2号

---

## 目次

内田 伏一：4 $m$ 次の特殊な相結魔方陣について ..... (19)

---

平成 27 年 2 月

山 形 大 学

## 4m次の特殊な相結魔方陣について

内田 伏一\*

(Received July 7, 2014)

### Abstract

A compact magic square of order  $n$  is a magic square where the four cells of all  $2 \times 2$  squares contained within it are summed to  $4/n$  of the magic constant.

In this paper, we consider two types of compact magic squares of order  $4m$ . The one is a compact magic square of order  $4m$  divided into  $m^2$  parts of pandiagonal magic squares of order 4, and the other is a compact magic square of order  $4m$  which has similar property to Franklin's magic square.

**0. はじめに** 本稿において、2つの型の  $4m$  次相結魔方陣について考察する。

その1つは、汎4方陣集合型相結  $4m$  方陣についてである。若干の知られている実例を紹介し、その特徴的性質を整理し、このような魔方陣の簡明な作り方を示す。この結果、すべての  $m > 1$  に対して、汎4方陣集合型相結  $4m$  方陣が存在することも保証される。

2つ目は、フランクリン型の相結  $4m$  方陣についてである。条件「斜」を満たす相結  $4m$  方陣を導入し、フランクリンが予期しなかったような優れた性質を有することを解説する。このような魔方陣についても簡明な作り方を示す。

**1. 相結魔方陣** 2方4格の ( $2 \times 2$  小正方形に属する)4数の和が、その2方4格をどこにとっても一定である場合、その魔方陣を**相結魔方陣**であるといい、4数の和の一定値を**相結定和**と呼ぶ。色々な性質を備えた魔方陣を作成する際に、相結性は重要な概念の1つとして、古くから活用されている。この相結性は偶数次の魔方陣にのみ意味のある性質である。

相結性をもつ顕著な性質で利用頻度の高いものを、ここに示しておく。

1) 相結魔方陣から  $3 \times 3$  小正方形を任意に抜き出した図 1.1a において、等式

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \cdots (s_1)$$

が成り立つ。

$a_1$		$a_2$
$b_1$		$b_2$

図 1.1a

$a_1$	$x_1$	$a_2$
$x_2$	$x_3$	$x_4$
$b_1$	$x_5$	$b_2$

図 1.1a'

\*山形大学名誉教授

等式  $(s_1)$  が成り立つことを示すため、図 1.1a' を利用する。相結性により、

$$(a_1 + x_1 + x_2 + x_3) + (b_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (a_2 + x_1 + x_3 + x_4) - (b_1 + x_2 + x_3 + x_5) = 0.$$

よって、 $a_1 + b_2 - a_2 - b_1 = 0$  を得る。これを变形して、等式  $(s_1)$  を得る。

この等式  $(s_1)$  を变形して、 $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$  または  $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$  と置いて考察することによって、次の図 1.1b において、等式

$$a_1 + b_3 = a_3 + b_1, a_1 + c_2 = a_2 + c_1, a_1 + c_3 = a_3 + c_1 \cdots (s'_1)$$

が成り立つことが分かる。

$a_1$		$a_2$		$a_3$
$b_1$		$b_2$		$b_3$
$c_1$		$c_2$		$c_3$

図 1.1b

2) 相結魔方陣から  $4 \times 4$  小正方形を任意に抜き出した図 1.1c において、等式

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = S \cdots (s_2)$$

が成り立つ。ここに、 $S$  は相結定和である。

$a_1$			$a_2$
$b_1$			$b_2$

図 1.1c

$a_1$	$x_1$	$x_2$	$a_2$
$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$b_1$	$y_5$	$y_6$	$b_2$

図 1.1c'

等式  $(s_2)$  が成り立つことを示すため、図 1.1c' を利用する。相結性により、

$$\begin{aligned} a_1 + x_1 + x_3 + x_4 &= S & x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= S \\ a_2 + x_2 + x_5 + x_6 &= S & y_2 + y_3 + y_5 + y_6 &= S \\ b_1 + y_1 + y_2 + y_5 &= S & x_3 + x_4 + y_1 + y_2 &= S \\ b_2 + y_3 + y_4 + y_6 &= S & x_5 + x_6 + y_3 + y_4 &= S \\ x_4 + x_5 + y_2 + y_3 &= S & & \end{aligned}$$

が成り立つ。左側の 5 式の和から右側の 4 式の和を引いて、等式  $(s_2)$  を得る。

さらに、図 1.1d における等式  $(s'_2)$  などを得る。

$a_1$				$a_3$
$b_1$				$b_3$

図 1.1d

$$a_1 + a_3 + b_1 + b_3 = S \cdots (s'_2)$$

相結魔方陣についての性質  $(s_1), (s'_1)$  を利用して、相結魔方陣は汎魔方陣であることを示してみよう。

相結8方陣の場合を例に、図 1.2ab を使って示そう。1つの汎対角線上の数の和と、その中の1つの数を通り直交する汎対角線上の数の和が一致することを示すのである。

$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$
	$a_2$	$b_2$	$c_2$
$d_3$	$a_3$	$b_3$	$c_3$
	$d_4$	$a_4$	$b_4$
$c_5$	$d_5$	$a_5$	$b_5$
	$c_6$	$d_6$	$a_6$
$b_7$	$c_7$	$d_7$	$a_7$
	$b_8$	$c_8$	$d_8$

図 1.2a

	$e_1$	$f_1$	$g_1$	$h_1$
$h_2$	$e_2$	$f_2$	$g_2$	
	$h_3$	$e_3$	$f_3$	$g_3$
$g_4$	$h_4$	$e_4$	$f_4$	
	$g_5$	$h_5$	$e_5$	$f_5$
$f_6$	$g_6$	$h_6$	$e_6$	
	$f_7$	$g_7$	$h_7$	$e_7$
$e_8$	$f_8$	$g_8$	$h_8$	

図 1.2b

等式  $(s_1), (s'_1)$  を繰り返し使用して、次の等式を得る。

$$\begin{aligned} a_1 + a_5 = c_1 + c_5, & \quad a_2 + a_4 = b_2 + d_4, & \quad a_6 + a_8 = b_6 + d_8, & \quad a_3 = a_3, & \quad a_7 = a_7 \\ b_1 + b_3 = c_1 + a_3, & \quad b_4 + b_8 = d_4 + d_8, & \quad b_5 + b_7 = c_5 + a_7, & \quad b_2 = b_2, & \quad b_6 = b_6 \\ c_2 + c_8 = b_2 + d_8, & \quad c_3 + c_7 = a_3 + a_7, & \quad c_4 + c_6 = d_4 + b_6, & \quad c_1 = c_1, & \quad c_5 = c_5 \\ d_1 + d_7 = c_1 + a_7, & \quad d_2 + d_6 = b_2 + b_6, & \quad d_3 + d_5 = a_3 + c_5, & \quad d_4 = d_4, & \quad d_8 = d_8 \\ e_1 + e_7 = h_1 + f_7, & \quad e_2 + e_6 = g_2 + g_6, & \quad e_3 + e_5 = f_3 + h_5, & \quad e_4 = e_4, & \quad e_8 = e_8 \\ f_1 + f_5 = h_1 + h_5, & \quad f_2 + f_4 = g_2 + e_4, & \quad f_6 + f_8 = g_6 + e_8, & \quad f_3 = f_3, & \quad f_7 = f_7 \\ g_1 + g_3 = h_1 + f_3, & \quad g_4 + g_8 = e_4 + e_8, & \quad g_5 + g_7 = h_5 + f_7, & \quad g_2 = g_2, & \quad g_6 = g_6 \\ h_2 + h_8 = g_2 + e_8, & \quad h_3 + h_7 = f_3 + f_7, & \quad h_4 + h_6 = e_4 + g_6, & \quad h_1 = h_1, & \quad h_5 = h_5 \end{aligned}$$

これらの等式より

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8, & \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8, & \quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 \end{aligned}$$

の値はいずれも  $c_1 + b_2 + a_3 + d_4 + c_5 + b_6 + a_7 + d_8$  と等しい値を持ち、

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8, & \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \\ g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8, & \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7 + h_8 \end{aligned}$$

の値はいずれも  $h_1 + g_2 + f_3 + e_4 + h_5 + g_6 + f_7 + e_8$  と等しい値を持つ、ことが分かる。

この中で、 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$  と  $h_1 + g_2 + f_3 + e_4 + h_5 + g_6 + f_7 + e_8$  は、主対角線上の数の和と副対角線上の数の和であり、この2つの値は魔方陣の定和に等しい。

上に示した結果は、右下がりの汎対角線上の数の和がいずれも魔方陣の定和に等しくなることを示している。全く同様の考察によって、左下がりの汎対角線上の数の和も魔方陣の定和に等しくなることが分かる。よって、相結魔方陣は汎魔方陣であることが示された。

文献 [4] においても、相結魔方陣は汎魔方陣であることを証明しているが、あまり見通しの良い証明ではなかったため、改良した証明を述べてみた。文献 [2],[3],[5] には相結性を持つ方陣と完全方陣 (汎魔方陣) とが一緒に記述されている項がたくさんあるが、相結魔方陣は完全方陣であるとの記述は見当たらない。これは、フランクリンの魔方陣などのように、相結性を満たす方形 (対角線和が定和に一致しない) などが扱われている故かと思われる。

**2. 4 方陣集合型相結 4m 方陣** まず、文献 [2] に記載されている 2 つの 4 方陣集合型相結 16 方陣とその解説を紹介しよう。

1	239	52	222	2	237	51	224	3	240	50	221	4	238	49	223
188	86	137	103	187	88	138	101	186	85	139	104	185	87	140	102
205	35	256	18	206	33	255	20	207	36	254	17	208	34	253	19
120	154	69	171	119	156	70	169	118	153	71	172	117	155	72	170
5	235	56	218	6	233	55	220	7	236	54	217	8	234	53	219
180	94	129	111	179	96	130	109	178	93	131	112	177	95	132	110
201	39	252	22	202	37	251	24	203	40	250	21	204	38	249	23
128	146	77	163	127	148	78	161	126	145	79	164	125	147	80	162
9	231	60	214	10	229	59	216	11	232	58	213	12	230	57	215
192	82	141	99	191	84	142	97	190	81	143	100	189	83	144	98
197	43	248	26	198	41	247	28	199	44	246	25	200	42	245	27
116	158	65	175	115	160	66	173	114	157	67	176	113	159	68	174
13	227	64	210	14	225	63	212	15	228	62	209	16	226	61	211
184	90	133	107	183	92	134	105	182	89	135	108	181	91	136	106
193	47	244	30	194	45	243	32	195	48	242	29	196	46	241	31
124	150	73	167	123	152	74	165	122	149	75	168	121	151	76	166

図 2.1a

1936 年ころ 境新作

1	254	227	32	33	222	195	64	65	190	163	96	97	158	131	128
255	4	29	226	223	36	61	194	191	68	93	162	159	100	125	130
30	225	256	3	62	193	224	35	94	161	192	67	126	129	160	99
228	31	2	253	196	63	34	221	164	95	66	189	132	127	98	157
9	246	235	24	41	214	203	56	73	182	171	88	105	150	139	120
247	12	21	234	215	44	53	202	183	76	85	170	151	108	117	138
22	233	248	11	54	201	216	43	86	169	184	75	118	137	152	107
236	23	10	245	204	55	42	213	172	87	74	181	140	119	106	149
17	238	243	16	49	206	211	48	81	174	179	80	113	142	147	112
239	20	13	242	207	52	45	210	175	84	77	178	143	116	109	146
14	241	240	19	46	209	208	51	78	177	176	83	110	145	144	115
244	15	18	237	212	47	50	205	180	79	82	173	148	111	114	141
25	230	251	8	57	198	219	40	89	166	187	72	121	134	155	104
231	28	5	250	199	60	37	218	167	92	69	186	135	124	101	154
6	249	232	27	38	217	200	59	70	185	168	91	102	153	136	123
252	7	26	229	220	39	58	197	188	71	90	165	156	103	122	133

図 2.1b

1938 年 安部元章作

図 2.1a の 16 方陣の特徴的な性質は、次の通りである。

1. 完全方陣であり定和は 2056 である。
2. 上下左右に 4 等分すれば 16 個の定和 514 の完全 4 方陣に分割される。
3. 相結魔方陣であり、相結定和は 514 である。
4. 16 個の 4 方陣の同じ位置にある数は連続する 16 個の数 (作り方の特徴) である。
5. 相隣る 4 個の 4 方陣で 8 方陣 (9 個) を作れば、どれも定和 1028 の完全方陣である。

6. 相隣る9個の4方陣で12方陣(4個)を作れば, どれも定和1542の完全方陣である.
7. 全16方陣, 任意に取り出した12方陣, 8方陣, 4方陣の4隅の数の和は, どれも514である.

図2.1bの16方陣の特徴的な性質は, 次の通りである.

1. 完全方陣であり定和は2056である.
2. 上下左右に4等分すれば16個の定和514の完全4方陣に分割される.
3. 相結魔方陣であり, 相結定和は514である.
4. 相隣る4個の4方陣で8方陣(9個)を作れば, どれも定和1028の完全方陣である.
5. 相隣る9個の4方陣で12方陣(4個)を作れば, どれも定和1542の完全方陣である.
6. 広い意味でのフランクリン型が成り立つ.

図2.1abはどちらも素晴らしい作品である. 汎4方陣集合型の相結16方陣であることのみを念頭に作成すれば, 結果として, 上記の特徴的な性質を持つことになる. この事実を把握して作成したものと思われる.

次に, 盆出芸の24次超完全方陣(作者の命名による)を文献[3],[5]から引用し, その解説と共に紹介しよう.

1 432 186 535	41 392 146 575	3 430 184 537	39 394 148 573	5 428 182 539	37 396 150 571
288 433 103 330	248 473 143 290	286 435 105 328	250 471 141 292	284 437 107 326	252 469 139 294
391 42 576 145	431 2 536 185	393 40 574 147	429 4 538 183	395 38 572 149	427 6 540 181
474 247 289 144	434 287 329 104	472 249 291 142	436 285 327 106	470 251 293 140	438 283 325 108
7 426 192 529	47 386 152 569	9 424 190 531	45 388 154 567	11 422 188 533	43 390 156 565
282 439 97 336	242 479 137 296	280 441 99 334	244 477 135 298	278 443 101 332	246 475 133 300
385 48 570 151	425 8 530 191	387 46 568 153	423 10 532 189	389 44 566 155	421 12 534 187
480 241 295 138	440 281 335 98	478 243 297 136	442 279 333 100	476 245 299 134	444 277 331 102
13 420 198 523	53 380 158 563	15 418 196 525	51 382 160 561	17 416 194 527	49 384 162 559
276 445 91 342	236 485 131 302	274 447 93 340	238 483 129 304	272 449 95 338	240 481 127 306
379 54 564 157	419 14 524 197	381 52 562 159	417 16 526 195	383 50 560 161	415 18 528 193
486 235 301 132	446 275 341 92	484 237 303 130	448 273 339 94	482 239 305 128	450 271 337 96
19 414 204 517	59 374 164 557	21 412 202 519	57 376 166 555	23 410 200 521	55 378 168 553
270 451 85 348	230 491 125 308	268 453 87 346	232 489 123 310	266 455 89 344	234 487 121 312
373 60 558 163	413 20 518 203	375 58 556 165	411 22 520 201	377 56 554 167	409 24 522 199
492 229 307 126	452 269 347 86	490 231 309 124	454 267 345 88	488 233 311 122	456 265 343 90
25 408 210 511	65 368 170 551	27 406 208 513	63 370 172 549	29 404 206 515	61 372 174 547
264 457 79 354	224 497 119 314	262 459 81 352	226 495 117 316	260 461 83 350	228 493 115 318
367 66 552 169	407 26 512 209	369 64 550 171	405 28 514 207	371 62 548 173	403 30 516 205
498 223 313 120	458 263 353 80	496 225 315 118	460 261 351 82	494 227 317 116	462 259 349 84
31 402 216 505	71 362 176 545	33 400 214 507	69 364 178 543	35 398 212 509	67 366 180 541
258 463 73 360	218 503 113 320	256 465 75 358	220 501 111 322	254 467 77 356	222 499 109 324
361 72 546 175	401 32 506 215	363 70 544 177	399 34 508 213	365 68 542 179	397 36 510 211
504 217 319 114	464 257 359 74	502 219 321 112	466 255 357 76	500 221 323 110	468 253 355 78

図2.1c

24次超完全方陣

1973年 盆出 芸作

図2.1cの24次方陣の性質は次の通りである.

1. 全体として見れば, 定和6924の24次完全方陣である.
2. 罫線で区切った36個の4次配列はすべて完全方陣である.
3. 罫線で区切った25個の8次配列, 16個の12次配列, 9個の16次配列, 4個の20次配列もすべて完全方陣である.

4. 任意の2次配列の4数の和はすべて一定1154である. すなわち, この24次方陣は相結魔方陣である.
5. 任意の4次配列, 6次配列, 8次配列, ..., 24次配列(偶数次配列)の4隅の数の和はすべて一定1154である.
6. 上下左右の4方向の”フランクリン型”が成立する.

文献[3],[5]にはこのように説明されている. この24方陣は, 汎4方陣集合型相結魔方陣であり, これもまた, 素晴らしい作品である.

**3. 汎4方陣集合型相結4m方陣の作り方** 筆者は文献[4]において汎4方陣集合型相結8方陣の構造を解析し, その全体像を明らかにした. その副産物の1つとして, 汎4方陣集合型相結4m方陣の簡明な作成法を見つけ, web-siteに公開していた.

その中の12方陣( $m=3$ )と16方陣( $m=4$ )の例を図3.1abとして, ここに示しておく.

<b>1</b>	124	30	135	<b>2</b>	125	29	134	<b>3</b>	126	<b>28</b>	133
66	99	<b>37</b>	88	65	98	38	89	<b>64</b>	97	39	90
115	<b>10</b>	144	21	116	11	143	20	117	12	142	<b>19</b>
108	57	79	<b>46</b>	107	56	80	47	106	<b>55</b>	81	48
<b>4</b>	121	33	132	<b>5</b>	122	32	131	<b>6</b>	123	31	130
69	96	40	85	68	95	41	86	67	94	42	87
112	13	141	24	113	14	140	23	114	15	139	22
105	60	76	49	104	59	77	50	103	58	78	51
<b>7</b>	<b>118</b>	36	129	<b>8</b>	119	35	128	<b>9</b>	120	34	<b>127</b>
72	93	43	<b>82</b>	71	92	44	83	70	<b>91</b>	45	84
<b>109</b>	16	138	27	110	17	137	26	111	18	<b>136</b>	25
102	63	<b>73</b>	52	101	62	74	53	<b>100</b>	61	75	54

図3.1a

<b>1</b>	221	52	240	<b>2</b>	222	51	239	<b>3</b>	223	50	238	<b>4</b>	224	<b>49</b>	237
116	176	<b>65</b>	157	115	175	66	158	114	174	67	159	<b>113</b>	173	68	160
205	<b>17</b>	256	36	206	18	255	35	207	19	254	34	208	20	253	<b>33</b>
192	100	141	<b>81</b>	191	99	142	82	190	98	143	83	189	<b>97</b>	144	84
<b>5</b>	217	56	236	<b>6</b>	218	55	235	<b>7</b>	219	54	234	<b>8</b>	220	53	233
120	172	69	153	119	171	70	154	118	170	71	155	117	169	72	156
201	21	252	40	202	22	251	39	203	23	250	38	204	24	249	37
188	104	137	85	187	103	138	86	186	102	139	87	185	101	140	88
<b>9</b>	213	60	232	<b>10</b>	214	59	231	<b>11</b>	215	58	230	<b>12</b>	216	57	229
124	168	73	149	123	167	74	150	122	166	75	151	121	165	76	152
197	25	248	44	198	26	247	43	199	27	246	42	200	28	245	41
184	108	133	89	183	107	134	90	182	106	135	91	181	105	136	92
<b>13</b>	<b>209</b>	64	228	<b>14</b>	210	63	227	<b>15</b>	211	62	226	<b>16</b>	212	61	<b>225</b>
128	164	77	<b>145</b>	127	163	78	146	126	162	79	147	125	<b>161</b>	80	148
<b>193</b>	29	244	48	194	30	243	47	195	31	242	46	196	32	<b>241</b>	45
180	112	<b>129</b>	93	179	111	130	94	178	110	131	95	<b>177</b>	109	132	96

3.1b

図3.1ab共, 4隅の4方陣の中の4か所の数を太字で記している. この数から出発して左から右へ(右から左へ)さらに上から下へ(下から上へ), 4方陣の同じ位置の数をたどってみれば, これらの方陣の作り方を把握できるものと思う. 大きい次数の汎4方陣集合型相結魔方陣の作成も容易であることが理解できよう.

もう1種類の汎4方陣集合型相結4m方陣について、12方陣( $m=3$ )と16方陣( $m=4$ )の例を図3.2abとして、ここに示しておく。これは、図2.1bの安部元章による16方陣と似た作り方で、数の配列が簡明になっているものである。

<b>1</b>	100	47	142	5	104	43	138	9	108	<b>39</b>	134
48	141	<b>2</b>	99	44	137	6	103	<b>40</b>	133	10	107
98	<b>3</b>	144	45	102	7	140	41	106	11	136	<b>37</b>
143	46	97	<b>4</b>	139	42	101	8	135	<b>38</b>	105	12
13	88	59	130	17	92	55	126	21	96	51	122
60	129	14	87	56	125	18	91	52	121	22	95
86	15	132	57	90	19	128	53	94	23	124	49
131	58	85	16	127	54	89	20	123	50	93	24
25	<b>76</b>	71	118	29	80	67	114	33	84	63	<b>110</b>
72	117	26	<b>75</b>	68	113	30	79	64	<b>109</b>	34	83
<b>74</b>	27	120	69	78	31	116	65	82	35	<b>112</b>	61
119	70	<b>73</b>	28	115	66	77	32	<b>111</b>	62	81	36

図3.2a

<b>1</b>	180	79	254	5	184	75	250	9	188	71	246	13	192	<b>67</b>	242
80	253	<b>2</b>	179	76	249	6	183	72	245	10	187	<b>68</b>	241	14	191
178	<b>3</b>	256	77	182	7	252	73	186	11	248	69	190	15	244	<b>65</b>
255	78	177	<b>4</b>	251	74	181	8	247	70	185	12	243	<b>66</b>	189	16
17	164	95	238	21	168	91	234	25	172	87	230	29	176	83	226
96	237	18	163	92	233	22	167	88	229	26	171	84	225	30	175
162	19	240	93	166	23	236	89	170	27	232	85	174	31	228	81
239	94	161	20	235	90	165	24	231	86	169	28	227	82	173	32
33	148	111	222	37	152	107	218	41	156	103	214	45	160	99	210
112	221	34	147	108	217	38	151	104	213	42	155	100	209	46	159
146	35	224	109	150	39	220	105	154	43	216	101	158	47	212	97
223	110	145	36	219	106	149	40	215	102	153	44	211	98	157	48
49	<b>132</b>	127	206	53	136	123	202	57	140	119	198	61	144	115	<b>194</b>
128	205	50	<b>131</b>	124	201	54	135	120	197	58	139	116	<b>193</b>	62	143
<b>130</b>	51	208	125	134	55	204	121	138	59	200	117	142	63	<b>196</b>	113
207	126	<b>129</b>	52	203	122	133	56	199	118	137	60	<b>195</b>	114	141	64

図3.2b

4隅の4方陣の中の4か所の数を太字で記している。この4個の数たちから出発して左から右へ(右から左へ)さらに上から下へ(下から上へ)、4方陣の同じ位置の数をたどってみれば、この方陣の作り方を把握できるものと思う。この方法でも大きい次数の汎4方陣集合型相結魔方陣の作成が容易であることが理解できよう。

ここに、4m次の汎4方陣集合型相結魔方陣の特徴的性質について、記述しておく。

1. 縦横に  $m$  等分すれば、 $m^2$  個の汎4方陣に分割される。
2. 相結魔方陣である。
3. 縦横に  $k$  個 ( $k=2,3,\dots,m-1$ ) の4方陣を貼り合わせてできる  $4k$  方陣も(相結魔方陣だから)完全方陣である。この  $4k$  方陣は見かけ上  $(m-k+1)^2$  個であるが、上4行を切り離して下段に貼り合わせる操作と左4列を切り離して右端に貼り合わせる操作を繰り返してみれば、 $k$  の値に関係なく  $m^2$  個の  $4k$  次の完全方陣が包まれている。

図3.1abおよび図3.2abの簡明な作り方を発見するに至った背景について、12方陣の場合を例に説明しよう。



0	<i>bdef</i>	<i>abc</i>	<i>acdef</i>	<i>a</i>	<i>abdef</i>	<i>bc</i>	<i>cdef</i>	$a_1$	
<i>abce</i>	<i>acdf</i>	<i>e</i>	<i>bd</i>	<i>bce</i>	<i>cdf</i>	<i>ae</i>	<i>abdf</i>		$c_1$
<i>def</i>	<i>b</i>	<i>abcdef</i>	<i>ac</i>	<i>adef</i>	<i>ab</i>	<i>bcdef</i>	<i>c</i>		
<i>abcd</i>	<i>ace</i>	<i>df</i>	<i>be</i>	<i>bcd</i>	<i>ce</i>	<i>ad</i>	<i>abe</i>		
<i>d</i>	<i>be</i>	<i>abcd</i>	<i>ace</i>	<i>ad</i>	<i>abe</i>	<i>bcd</i>	<i>cef</i>		
<i>abcde</i>	<i>ac</i>	<i>de</i>	<i>bf</i>	<i>bcde</i>	<i>cf</i>	<i>ade</i>	<i>abf</i>		
<i>ef</i>	<i>bd</i>	<i>abce</i>	<i>acd</i>	<i>ae</i>	<i>abd</i>	<i>bce</i>	<i>cd</i>		
<i>abc</i>	<i>f</i>	<i>bde</i>		<i>bc</i>	<i>cde</i>	<i>af</i>	<i>abde</i>		
$d_1$									
									$f_1$

図 3.3a

0	<i>bdef</i>	<i>abc</i>	<i>acdef</i>	<i>a</i>	<i>abdef</i>	<i>bc</i>	<i>cdef</i>	$a_1$	$a_1bdef$	$bc_1$	$c_1def$
<i>abce</i>	<i>acdf</i>	<i>e</i>	<i>bd</i>	<i>bce</i>	<i>cdf</i>	<i>ae</i>	<i>abdf</i>	$bc_1e$	$c_1df$	$a_1e$	$a_1bdf$
<i>def</i>	<i>b</i>	<i>abcdef</i>	<i>ac</i>	<i>adef</i>	<i>ab</i>	<i>bcdef</i>	<i>c</i>	$a_1def$	$a_1b$	$bc_1def$	$c_1$
<i>abcd</i>	<i>ace</i>	<i>df</i>	<i>be</i>	<i>bcd</i>	<i>ce</i>	<i>ad</i>	<i>abe</i>	$bc_1df$	$c_1e$	$a_1df$	$a_1be$
<i>d</i>	<i>be</i>	<i>abcd</i>	<i>ace</i>	<i>ad</i>	<i>abe</i>	<i>bcd</i>	<i>cef</i>	$a_1d$	$a_1be$	$bc_1d$	$c_1ef$
<i>abcde</i>	<i>ac</i>	<i>de</i>	<i>bf</i>	<i>bcde</i>	<i>cf</i>	<i>ade</i>	<i>abf</i>	$bc_1de$	$c_1f$	$a_1de$	$a_1bf$
<i>ef</i>	<i>bd</i>	<i>abce</i>	<i>acd</i>	<i>ae</i>	<i>abd</i>	<i>bce</i>	<i>cd</i>	$a_1ef$	$a_1bd$	$bc_1ef$	$c_1d$
<i>abc</i>	<i>f</i>	<i>bde</i>		<i>bc</i>	<i>cde</i>	<i>af</i>	<i>abde</i>	$bc_1f$	$c_1de$	$a_1f$	$a_1bde$
$d_1$	$be_{f_1}$	$abcd_1$	$ace_{f_1}$	$ad_1$	$abe_{f_1}$	$bcd_1$	$ce_{f_1}$	$a_1d_1$	$a_1be_{f_1}$	$bc_1d_1$	$c_1ef_1$
$abcd_1e$	$ac_{f_1}$	$d_1e$	$bf_1$	$bc_1d_1e$	$cf_1$	$ad_1e$	$ab_{f_1}$	$bc_1d_1e$	$c_1f_1$	$a_1d_1e$	$a_1bf_1$
$ef_1$	$bd_1$	$abce_{f_1}$	$acd_1$	$ae_{f_1}$	$abd_1$	$bce_{f_1}$	$cd_1$	$a_1ef_1$	$a_1bd_1$	$bc_1ef_1$	$c_1d_1$
$abc_{f_1}$	$acd_1e$	$f_1$	$bd_1e$	$bc_{f_1}$	$cd_1e$	$af_1$	$abd_1e$	$bc_1f_1$	$c_1d_1e$	$a_1f_1$	$a_1bd_1e$

図 3.3b

図 3.3a において、汎 4 方陣集合型相結 8 方陣の標準形 (文献 [4] 参照) が記入されている。記述の簡略化のため、和の記号 + を省略している。例えば、*abc* と記入されているのは  $a + b + c$  の意味である。この図を汎 4 方陣集合型相結 12 方陣に発展させてみよう。中央の 4 列と右端の 4 列を置換すること、および中央の 4 行と下端の 4 行を置換することは汎 4 方陣集合型相結 12 方陣という性質を保った変換である。

このような変換を念頭に、*a, c* を  $a_1, c_1$  に置き換えたり、*d, f* を  $d_1, f_1$  に置き換えたりして、空欄を埋める作業を実行する。この結果、図 3.3b を得る。図 3.3b において、等式  $ac = a_1c_1, df = d_1f_1$  が成り立つ。

図 3.1a は、図 3.3b において、

$$a = 1, b = 9, c = 19, d = 3, e = 36, f = 75, a_1 = 2, c_1 = 18, d_1 = 6, f_1 = 72$$

と置いて作成し、各項に 1 を加えたものに一致している。

図 3.2a は、図 3.3b において、

$$a = 4, b = 2, c = 40, d = 12, e = 1, f = 84, a_1 = 8, c_1 = 36, d_1 = 24, f_1 = 72$$

と置いて作成し、各項に 1 を加えたものに一致している。

4. フランクリン型魔方陣 文献 [2],[3],[5] に、政治家であり科学者でもあったフランクリン (1706-1790) が友人に宛てた手紙の中に記されていた 8 方形と 16 方形 (いずれも対角線和が方陣

の定和になっていない)が**フランクリン型魔方陣**として紹介されている。これは、対角線とが方陣の定和と異なるが、たくさんの定和をもつ素晴らしいもの故である。

ここに、フランクリンの8方形を図4.1として記し、その解説を紹介しておく。

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

図4.1 Franklin 作

この8方形の行和、列和は260であり、相結(すなわち2方4格の4数の和が130で一定)である。この他の特徴的な性質を記しておく。

- 上下左右に2等分してできる4個の $4 \times 4$ の表は定和130の4方形である。
- 上向きの山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $16+63+57+10+23+40+34+17$ ,  $53+3+4+49+48+29+30+44$  など。
- 下向きの山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $52+3+5+54+43+28+30+45$ ,  $50+1+4+51+46+29+32+47$  など。
- 右向きの山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $52+3+5+54+10+57+63+16$ ,  $61+62+12+43+23+56+2+1$  など。
- 左向きの山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $45+30+28+43+23+40+34+17$ ,  $13+62+60+11+55+8+2+49$  など。
- 上向きの2連山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $16+63+2+49+48+31+34+17$ ,  $50+8+57+15+18+40+25+47$  など。
- 下向きの2連山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $52+3+62+13+20+35+30+45$ ,  $14+60+5+51+46+28+37+19$  など。
- 上向きの2連とんがり山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $16+63+57+15+18+40+34+17$ ,  $53+3+4+51+46+29+30+44$  など。
- 下向きの2連とんがり山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $52+3+5+51+46+28+30+45$ ,  $55+8+2+56+41+31+25+42$  など。
- 右向きの2連とんがり山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $52+3+5+6+58+57+63+16$ ,  $29+30+44+27+39+24+34+33$  など。
- 左向きの2連とんがり山の形(8組)の8数の和は260である。  
 $45+30+28+27+39+40+34+17$ ,  $13+62+60+59+7+8+2+49$  など。

残念ながら、この8方形では右向きおよび左向きの2連山の形については8数の和は260にはならない。上記の性質のうち2, 3, 4, 5を満たすものを(広い意味で)**フランクリン型**と呼ぶようである。

なお、中国では楊輝がフランクリンより500年も前にフランクリン型に近い10方形を得ていたことが、その10方形とともに文献[2]に記されている。

5. 条件 $\square$ 斜を満たす相結 $4m$ 方陣 文献 [1] において, 阿部楽方は図 5.1a の 8 方陣と図 5.1b の 12 方陣を提示し, これらの 2 つの方陣が次に示すような優れた性質を持っていることを紹介している.

1	8	41	48	25	32	49	56
57	64	17	24	33	40	9	16
6	3	46	43	30	27	54	51
62	59	22	19	38	35	14	11
4	5	44	45	28	29	52	53
60	61	20	21	36	37	12	13
7	2	47	42	31	26	55	50
63	58	23	18	39	34	15	10

図 5.1a 1977 年 阿部楽方 作

1	34	74	107	75	108	3	36	110	143	73	106
111	144	38	71	37	70	109	142	2	35	39	72
31	4	104	77	105	78	33	6	140	113	103	76
141	114	68	41	67	40	139	112	32	5	69	42
7	28	80	101	81	102	9	30	116	137	79	100
117	138	44	65	43	64	115	136	8	29	45	66
25	10	98	83	99	84	27	12	134	119	97	82
135	120	62	47	61	46	133	118	26	11	63	48
22	13	95	86	96	87	24	15	131	122	94	85
132	123	59	50	58	49	130	121	23	14	60	51
19	16	92	89	93	90	21	18	128	125	91	88
129	126	56	53	55	52	127	124	20	17	57	54

図 5.1b 1977 年 阿部楽方 作

2 つの方陣ともに汎魔方陣であり, さらに次の性質を持っている. その優れた性質について, 8 方陣の場合には図 5.1c を使って, 12 方陣の場合には図 5.1d を使って説明しよう.

8 方陣の場合には,  $\circ$  印 8 か所の山の形 (折斜と呼ぶ) の数の和および  $\bullet$  印 8 か所の 2 連山の形 (複折斜と呼ぶ) の数の和が共に 260 で方陣の定和に一致している. さらに上下に平行移動した 8 か所, 左右に 2 列平行移動した 8 か所の数の和も 260 である.

また, 図 5.1c を  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  回転した図についても全く同じような性質を持つ.

12 方陣の場合には,  $\circ$  印 12 か所の山の形 (折斜) の数の和および  $\bullet$  印 12 か所の 3 連山の形 (複折斜) の数の和が共に 870 で方陣の定和に一致している. さらに上下に平行移動した 12 か所, 左右に 2 列平行移動した 12 か所の数の和も 870 である.

また, 図 5.1d を  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  回転した図についても全く同じような性質を持つ.

さらに, 8 方陣の場合には類似の性質を持ったものの研究が知られていたが, 12 方陣については図 5.1b が初めての例であることが述べられている.

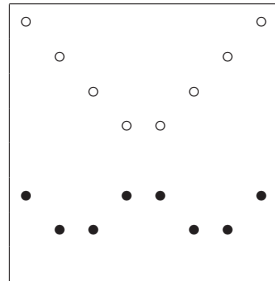


図 5.1c

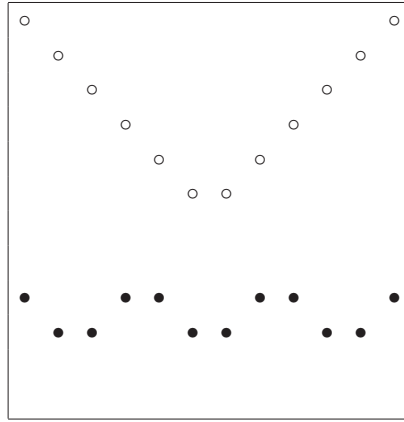


図 5.1d

図 5.1a と図 5.1b の方陣について調べてみると、この2つの方陣はともに相結方陣であり、さらに

**斜** 2行ごと2列ごとに線を引いて、 $2 \times 2$ の小正方形に分割してみると、各小正方形の斜め2数の和が一定の値になっている。

この条件を本稿では、条件**斜**と呼ぶことにする。

条件**斜**を満たす相結8方陣は図 5.2a において  $a, b, c, d, e, f$  に  $1, 2, 4, 8, 16, 32$  を代入し、各成分に1を加えることによって実現できる。実際、図 5.1a の8方陣は図 5.2a において

$$a = 8, b = 32, c = 16, d = 1, e = 4, f = 2$$

と置いたものに対応している。図 5.2a では和の記号+を省いており、 $abc$  は  $a + b + c$  を表す。

0	$def$	$ab$	$abdef$	$ac$	$acdef$	$bc$	$bcdef$
$abc$	63	$c$	$cdef$	$b$	$bdef$	$a$	$adef$
$de$	$f$	$abde$	$abf$	$acde$	$acf$	$bcde$	$bcf$
$abcde$	$abc f$	$cde$	$c f$	$bde$	$b f$	$ade$	$a f$
$df$	$e$	$abdf$	$abe$	$acdf$	$ace$	$bcdf$	$bce$
$abcd f$	$abce$	$cdf$	$ce$	$bdf$	$be$	$adf$	$ae$
$ef$	$d$	$abef$	$abd$	$ace f$	$acd$	$bce f$	$bcd$
$abce f$	$abcd$	$ce f$	$cd$	$be f$	$bd$	$ae f$	$ad$

図 5.2a

条件**斜**を満たす相結8方陣に、数の置換  $(2,8)(4,6)$  を行の置換と列の置換として続けて施した変換を実行すると、定和点対称型相結8方陣に変換され、逆に定和点対称型相結8方陣に同じ変換を実行すると、条件**斜**を満たす相結8方陣に変換されることが分かる。

とくに、条件 $\square$ 斜を満たす相結8方陣の全体と定和点対称型相結8方陣の全体は1対1に対応することが分かる。この結果、条件 $\square$ 斜を満たす相結8方陣の総数は5,760個であることが分かる。

図5.2aは、筆者が文献[4]で考察した定和点対称型相結8方陣の標準形に上記の変換を施したものである。

図5.2bは、条件 $\square$ 斜を満たす相結12方陣である。

1	12	25	36	73	84	85	96	97	108	121	132
133	144	109	120	61	72	49	60	37	48	13	24
3	10	27	34	75	82	87	94	99	106	123	130
135	142	111	118	63	70	51	58	39	46	15	22
7	6	31	30	79	78	91	90	103	102	127	126
139	138	115	114	67	66	55	54	43	42	19	18
8	5	32	29	80	77	92	89	104	101	128	125
140	137	116	113	68	65	56	53	44	41	20	17
9	4	33	28	81	76	93	88	105	100	129	124
141	136	117	112	69	64	57	52	45	40	21	16
11	2	35	26	83	74	95	86	107	98	131	122
143	134	119	110	71	62	59	50	47	38	23	14

図5.2b

相結8方陣の場合と同じように、数の置換(2,12)(4,10)(6,8)による変換を実行することによって、条件 $\square$ 斜を満たす相結12方陣の全体と定和点対称型相結12方陣の全体は1対1に対応することが分かる。この結果、条件 $\square$ 斜を満たす相結12方陣の総数は3,628,800個であることが分かる。これは、定和点対称型相結12方陣の総数の計算結果による。

先に示したように、相結魔方陣は完全方陣(汎魔方陣)である。ここでは、条件 $\square$ 斜を満たす相結 $4m$ 方陣は、図5.1aと図5.1bの方陣と同じように、4方向の山の形(折斜)及び $m$ 連山の形(複折斜)の数の和が方陣の定和に一致することを示そう。

12方陣の場合について説明する。下記の図では $2 \times 2$ の小正方形との位置関係が分かるように表示してある。まず、3連山の形(複折斜)の場合について、図5.3aと図5.3bの2つの図を準備する。

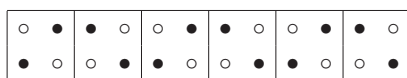


図5.3a

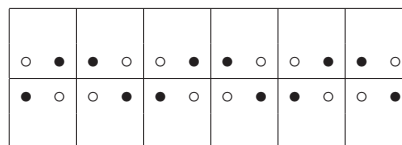


図5.3b

この図5.3a, 図5.3bにおいて、同じ記号の12カ所の数の和が方陣の定和に一致することを示したい。

図5.3aの場合には、条件 $\square$ 斜によって○印の12カ所および●印の12カ所の数の和が方陣の定和に一致することは明らかである。図5.3bの場合について考察しよう。次の図5.3cを準備する。

	$a_2$	$a_3$		$a_6$	$a_7$		$a_{10}$	$a_{11}$	
$b_1$			$b_4$	$b_5$			$b_8$	$b_9$	$b_{12}$
	$c_2$	$c_3$		$c_6$	$c_7$		$c_{10}$	$c_{11}$	

図 5.3c

図 5.3c において、相結性を使うと次の等式が成り立つことが分かる。

$$a_2 + a_3 = c_2 + c_3, \quad a_6 + a_7 = c_6 + c_7, \quad a_{10} + a_{11} = c_{10} + c_{11}$$

よって、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & b_1 + a_2 + a_3 + b_4 + b_5 + a_6 + a_7 + b_8 + b_9 + a_{10} + a_{11} + b_{12} \\ &= b_1 + c_2 + c_3 + b_4 + b_5 + c_6 + c_7 + b_8 + b_9 + c_{10} + c_{11} + b_{12} \end{aligned}$$

すなわち、図 5.3c を利用すれば、図 5.3b の ○印および ●印の 12カ所の数の和は、図 5.3a の ●印および ○印の 12カ所の数の和に一致することになる。結局、図 5.3b の ○印および ●印の 12カ所の数の和も方陣の定和に一致することが分かる。

次に、山の形 (折斜) の場合について、図 5.3d と図 5.3e を準備する。

○ <sub>1</sub>	● <sub>1</sub>	● <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>
● <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>1</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>
● <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>
○ <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>
○ <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>
● <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>

図 5.3d

○ <sub>1</sub>	● <sub>1</sub>	● <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>
● <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>1</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>
● <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>
○ <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>
○ <sub>3</sub>	● <sub>2</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>
● <sub>2</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	● <sub>3</sub>	○ <sub>3</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>	○ <sub>1</sub>	○ <sub>2</sub>

図 5.3e

この図 5.3d, 図 5.3e において、同じ記号の 12カ所の数の和が方陣の定和に一致することを示したい。

図 5.3d の場合には、条件 斜 によって同じ記号の 12カ所の数の和が方陣の定和に一致することは明らかである。図 5.3e の場合について考察しよう。次の図 5.3f を準備する。

			$c_6$	$c_7$				
$a_1$			$c_5$		$c_8$			$a_{12}$
	$a_2$		$c_4$			$c_9$		$a_{11}$
		$b_3$					$b_{10}$	
	$c_2$		$a_4$			$a_9$		$c_{11}$
$c_1$			$a_5$		$a_8$			$c_{12}$
			$a_6$	$a_7$				

図 5.3f

図 5.3f において、相結性によって次の等式が成り立つ。

$$a_1 + a_5 = c_1 + c_5, \quad a_2 + a_4 = c_2 + c_4, \quad a_6 + a_7 = c_6 + c_7, \\ a_8 + a_{12} = c_8 + c_{12}, \quad a_9 + a_{11} = c_9 + c_{11}$$

この結果、図 5.3f の上下向きの山の形 (折斜) の 12カ所の数の和が一致することが分かる。図 5.3f を利用することによって、図 5.3e の各折斜の数の和は図 5.3d のある折斜の数の和に一致することが分かる。すなわち、図 5.3e の場合にも、同じ記号の 12カ所の数の和は方陣の定和に一致することが分かった。

ここまでの考察の結果、一般に条件  $\boxed{\text{斜}}$  を満たす相結  $4m$  方陣について、図 5.3a、図 5.3b を参考に、 $16m(= 2 \times 4m \times 2)$  個の  $m$  連山の形 (複折斜) の定和性が分かり、図 5.3d、図 5.3e を参考に、 $16m^2(= 2m \times 4m \times 2)$  個の山の形 (折斜) の定和性が分かる。

これは、相結  $4m$  方陣について  $8m$  個の汎斜 (汎対角線) の定和性が分かることに比べて非常に多くの定和性が分かることを意味している。

途中の説明を省略するが、0 から始まる相結 16 方陣で、左上隅に 0 が配置され、条件  $\boxed{\text{斜}}$  を満たすものは、図 5.4a のように表示できる。

0	$N$	$\bar{g}$	$\bar{g}N$	$\bar{f}$	$\bar{f}N$	$\bar{e}$	$\bar{e}N$	$\bar{d}$	$\bar{d}N$	$\bar{c}$	$\bar{c}N$	$\bar{b}$	$\bar{b}N$	$\bar{a}$	$\bar{a}N$
$M$	$MN$	$g$	$gN$	$f$	$fN$	$e$	$eN$	$d$	$dN$	$c$	$cN$	$b$	$bN$	$a$	$aN$
$\bar{n}$	$n$	$\bar{g}\bar{n}$	$\bar{g}n$	$\bar{f}\bar{n}$	$\bar{f}n$	$\bar{e}\bar{n}$	$\bar{e}n$	$\bar{d}\bar{n}$	$\bar{d}n$	$\bar{c}\bar{n}$	$\bar{c}n$	$\bar{b}\bar{n}$	$\bar{b}n$	$\bar{a}\bar{n}$	$\bar{a}n$
$M\bar{n}$	$Mn$	$g\bar{n}$	$gn$	$f\bar{n}$	$fn$	$e\bar{n}$	$en$	$d\bar{n}$	$dn$	$c\bar{n}$	$cn$	$b\bar{n}$	$bn$	$a\bar{n}$	$an$
$\bar{m}$	$m$	$\bar{g}\bar{m}$	$\bar{g}m$	$\bar{f}\bar{m}$	$\bar{f}m$	$\bar{e}\bar{m}$	$\bar{e}m$	$\bar{d}\bar{m}$	$\bar{d}m$	$\bar{c}\bar{m}$	$\bar{c}m$	$\bar{b}\bar{m}$	$\bar{b}m$	$\bar{a}\bar{m}$	$\bar{a}m$
$M\bar{m}$	$Mm$	$g\bar{m}$	$gm$	$f\bar{m}$	$fm$	$e\bar{m}$	$em$	$d\bar{m}$	$dm$	$c\bar{m}$	$cm$	$b\bar{m}$	$bm$	$a\bar{m}$	$am$
$\bar{l}$	$l$	$\bar{g}\bar{l}$	$\bar{g}l$	$\bar{f}\bar{l}$	$\bar{f}l$	$\bar{e}\bar{l}$	$\bar{e}l$	$\bar{d}\bar{l}$	$\bar{d}l$	$\bar{c}\bar{l}$	$\bar{c}l$	$\bar{b}\bar{l}$	$\bar{b}l$	$\bar{a}\bar{l}$	$\bar{a}l$
$M\bar{l}$	$Ml$	$g\bar{l}$	$gl$	$f\bar{l}$	$fl$	$e\bar{l}$	$el$	$d\bar{l}$	$dl$	$c\bar{l}$	$cl$	$b\bar{l}$	$bl$	$a\bar{l}$	$al$
$\bar{k}$	$k$	$\bar{g}\bar{k}$	$\bar{g}k$	$\bar{f}\bar{k}$	$\bar{f}k$	$\bar{e}\bar{k}$	$\bar{e}k$	$\bar{d}\bar{k}$	$\bar{d}k$	$\bar{c}\bar{k}$	$\bar{c}k$	$\bar{b}\bar{k}$	$\bar{b}k$	$\bar{a}\bar{k}$	$\bar{a}k$
$M\bar{k}$	$Mk$	$g\bar{k}$	$gk$	$f\bar{k}$	$fk$	$e\bar{k}$	$ek$	$d\bar{k}$	$dk$	$c\bar{k}$	$ck$	$b\bar{k}$	$bk$	$a\bar{k}$	$ak$
$\bar{j}$	$j$	$\bar{g}\bar{j}$	$\bar{g}j$	$\bar{f}\bar{j}$	$\bar{f}j$	$\bar{e}\bar{j}$	$\bar{e}j$	$\bar{d}\bar{j}$	$\bar{d}j$	$\bar{c}\bar{j}$	$\bar{c}j$	$\bar{b}\bar{j}$	$\bar{b}j$	$\bar{a}\bar{j}$	$\bar{a}j$
$M\bar{j}$	$Mj$	$g\bar{j}$	$gj$	$f\bar{j}$	$fj$	$e\bar{j}$	$ej$	$d\bar{j}$	$dj$	$c\bar{j}$	$cj$	$b\bar{j}$	$bj$	$a\bar{j}$	$aj$
$\bar{i}$	$i$	$\bar{g}\bar{i}$	$\bar{g}i$	$\bar{f}\bar{i}$	$\bar{f}i$	$\bar{e}\bar{i}$	$\bar{e}i$	$\bar{d}\bar{i}$	$\bar{d}i$	$\bar{c}\bar{i}$	$\bar{c}i$	$\bar{b}\bar{i}$	$\bar{b}i$	$\bar{a}\bar{i}$	$\bar{a}i$
$M\bar{i}$	$Mi$	$g\bar{i}$	$gi$	$f\bar{i}$	$fi$	$e\bar{i}$	$ei$	$d\bar{i}$	$di$	$c\bar{i}$	$ci$	$b\bar{i}$	$bi$	$a\bar{i}$	$ai$
$\bar{h}$	$h$	$\bar{g}\bar{h}$	$\bar{g}h$	$\bar{f}\bar{h}$	$\bar{f}h$	$\bar{e}\bar{h}$	$\bar{e}h$	$\bar{d}\bar{h}$	$\bar{d}h$	$\bar{c}\bar{h}$	$\bar{c}h$	$\bar{b}\bar{h}$	$\bar{b}h$	$\bar{a}\bar{h}$	$\bar{a}h$
$M\bar{h}$	$Mh$	$g\bar{h}$	$gh$	$f\bar{h}$	$fh$	$e\bar{h}$	$eh$	$d\bar{h}$	$dh$	$c\bar{h}$	$ch$	$b\bar{h}$	$bh$	$a\bar{h}$	$ah$

図 5.4a

この図 5.4a でも、和の記号 + を省いている。ここに、

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, M, N$$

は正の整数で、次の等式を満たすものである。

$$a + b + c + d + e + f + g = 3M, \quad h + i + j + k + l + m + n = 3N \\ a + \bar{a} = b + \bar{b} = c + \bar{c} = d + \bar{d} = e + \bar{e} = f + \bar{f} = g + \bar{g} = M \\ h + \bar{h} = i + \bar{i} = j + \bar{j} = k + \bar{k} = l + \bar{l} = m + \bar{m} = n + \bar{n} = N$$

図 5.4a の各成分は (1) の中の 1 つと (2) の中の 1 つとの和の全体に一致している.

$$0, a, b, c, d, e, f, g, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}, M \quad \dots (1)$$

$$0, h, i, j, k, \ell, m, n, \bar{h}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{\ell}, \bar{m}, \bar{n}, N \quad \dots (2)$$

全体として 0 から 255 (=  $16^2 - 1$ ) までの数がすべて現れるように  $a, b, c, \dots$  の値を決めることができれば, その各成分に 1 を加えたものが求める 16 方陣である.

このようにして作った定和 2056 の 16 方陣の 1 つが図 5.4b である.

1	241	4	244	6	246	7	247	9	249	12	252	14	254	15	255
16	256	13	253	11	251	10	250	8	248	5	245	3	243	2	242
49	193	52	196	54	198	55	199	57	201	60	204	62	206	63	207
64	208	61	205	59	203	58	202	56	200	53	197	51	195	50	194
81	161	84	164	86	166	87	167	89	169	92	172	94	174	95	175
96	176	93	173	91	171	90	170	88	168	85	165	83	163	82	162
97	145	100	148	102	150	103	151	105	153	108	156	110	158	111	159
112	160	109	157	107	155	106	154	104	152	101	149	99	147	98	146
129	113	132	116	134	118	135	119	137	121	140	124	142	126	143	127
144	128	141	125	139	123	138	122	136	120	133	117	131	115	130	114
177	65	180	68	182	70	183	71	185	73	188	76	190	78	191	79
192	80	189	77	187	75	186	74	184	72	181	69	179	67	178	66
209	33	212	36	214	38	215	39	217	41	220	44	222	46	223	47
224	48	221	45	219	43	218	42	216	40	213	37	211	35	210	34
225	17	228	20	230	22	231	23	233	25	236	28	238	30	239	31
240	32	237	29	235	27	234	26	232	24	229	21	227	19	226	18

図 5.4b

図 5.4b は条件  $\square$  を満たす相結 16 方陣だから, 64 個の 4 連山の形 (複折斜) と 256 個の山の形 (折斜) の定和性が分かる. さらに, 図 5.4c に示す  $\circ$  印 16 ヶ所の 2 連山の形の数の和で方陣の定和に一致するものが 128 (=  $4 \times 16 \times 2$ ) 個存在する.

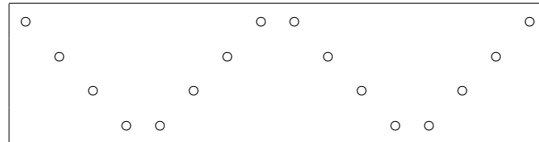


図 5.4c

このように, 条件  $\square$  を満たす相結  $4m$  方陣について,  $m$  の値が大きくなれば, 折斜, 複折斜の定和性だけでなく, 類似の図形の定和性についての性質が次々に増えてくる.

**6. 条件  $\square$  を満たす相結  $4m$  方陣の作り方** 条件  $\square$  を満たす相結  $4m$  方陣の簡明な作り方を考案した. その作り方により作成した 8 方陣, 12 方陣, 16 方陣を示しておく. 各方陣について, 数の配置を 1, 2, 3,  $\dots$  と 8 個, 12 個, 16 個を組にしてたどって確認してほしい.

最後の図 6.1c は, 条件  $\square$  を満たす 8 方陣集合型相結 16 方陣である. 上下左右に 2 等分すると 4 個の 8 方陣に分割される. シフト変換により, この他に 12 個の 8 方陣が隠れていることが分かり, 合計 16 個の 8 方陣が存在する. この 16 個の 8 方陣はいずれも条件  $\square$  を満たす相結 8 方陣である. これらの 8 方陣および 16 方陣は, いずれも相結魔方陣だから汎魔方陣である.



<b>1</b> 57	<b>7</b> 63	<b>6</b> 62	<b>4</b> 60
<b>8</b> 64	<b>2</b> 58	<b>3</b> 59	<b>5</b> 61
49 9	55 15	54 14	52 12
56 16	50 10	51 11	53 13
41 17	47 23	46 22	44 20
48 24	42 18	43 19	45 21
25 33	31 39	30 38	28 36
32 40	26 34	27 35	29 37

図 6.1a

<b>1</b> 133	<b>11</b> 143	<b>3</b> 135	<b>9</b> 141	<b>8</b> 140	<b>7</b> 139
<b>12</b> 144	<b>2</b> 134	<b>10</b> 142	<b>4</b> 136	<b>5</b> 137	<b>6</b> 138
121 13	131 23	123 15	129 21	128 20	127 19
132 24	122 14	130 22	124 16	125 17	126 18
25 109	35 119	27 111	33 117	32 116	31 115
36 120	26 110	34 118	28 112	29 113	30 114
97 37	107 47	99 39	105 45	104 44	103 43
108 48	98 38	106 46	100 40	101 41	102 42
85 49	95 59	87 51	93 57	92 56	91 55
96 60	86 50	94 58	88 52	89 53	90 54
73 61	83 71	75 63	81 69	80 68	79 67
84 72	74 62	82 70	76 64	77 65	78 66

図 6.1b

<b>1</b> 241	<b>15</b> 255	<b>14</b> 254	<b>4</b> 244	<b>5</b> 245	<b>11</b> 251	<b>10</b> 250	<b>8</b> 248
<b>16</b> 256	<b>2</b> 242	<b>3</b> 243	<b>13</b> 253	<b>12</b> 252	<b>6</b> 246	<b>7</b> 247	<b>9</b> 249
225 17	239 31	238 30	228 20	229 21	235 27	234 26	232 24
240 32	226 18	227 19	237 29	236 28	230 22	231 23	233 25
209 33	223 47	222 46	212 36	213 37	219 43	218 42	216 40
224 48	210 34	211 35	221 45	220 44	214 38	215 39	217 41
49 193	63 207	62 206	52 196	53 197	59 203	58 202	56 200
64 208	50 194	51 195	61 205	60 204	54 198	55 199	57 201
65 177	79 191	78 190	68 180	69 181	75 187	74 186	72 184
80 192	66 178	67 179	77 189	76 188	70 182	71 183	73 185
161 81	175 95	174 94	164 84	165 85	171 91	170 90	168 88
176 96	162 82	163 83	173 93	172 92	166 86	167 87	169 89
145 97	159 111	158 110	148 100	149 101	155 107	154 106	152 104
160 112	146 98	147 99	157 109	156 108	150 102	151 103	153 105
113 129	127 143	126 142	116 132	117 133	123 139	122 138	120 136
128 144	114 130	115 131	125 141	124 140	118 134	119 135	121 137

図 6.1c

次数が8の倍数の場合には、図6.1a, 図6.1cのように作り方は明快であるが、次数が8の倍数でない場合には、図6.1bのように作り方が明快ではない。

図6.1bの作り方について補足しておく。上2行の太数字の部分の如何に決めるかが鍵になる。相結性を保つように、左から順に(1,12)(2,11)(3,10)(4,9)(5,8)(6,7)を上下に配置し、行の定和性を保たせると、図6.1bの上2行の配置になる。左2列の配置についても同様の考察を行う。

図6.1cの16方陣に関して、定和の個数について、

1. 16方陣の定和2056を与えるものが、行和、列和、汎斜和の64組
2. 8方陣の定和1028を与えるものが、行和、列和、汎斜和の合計256組
3. 相結定和514(256組)
4. 16方陣全体での、4方向の山の形が与える定和2056(合計64組)
5. 16方陣全体での、4方向の2連山の形が与える定和2056(合計64組)
6. 16方陣全体での、4方向の4連山の形が与える定和2056(合計64組)  
 $1+256+2+255+14+243+13+244+5+252+6+251+10+247+9+248,$   
 $16+17+239+242+3+30+228+253+12+21+235+246+7+26+232+249$  など
7. 16方陣全体での、横長と縦長のジグザグにとった16数の和2056(32組)  
 $1+256+15+242+14+243+4+253+5+252+11+246+10+247+8+249,$   
 $16+241+2+255+3+254+13+244+12+245+6+251+7+250+9+248$  など
8. 8方陣の広い意味でのフランクリン型が与える定和1028(合計448組)  
 $128+129+146+111+158+99+116+141, 161+192+79+130+115+190+77+84$  など
9. 8方陣の4方向2連山の形が与える定和1028(1088組)  
 $113+112+146+143+126+99+157+132, 65+144+114+191+78+131+125+180$  など
10. 8方陣の横長と縦長のジグザグにとった8数の和1028(256組)  
 $65+192+161+96+145+112+113+144, 177+80+81+176+97+160+129+128$  など

他にも定和を与える図形が存在するが省略する。

#### 参考文献

- [1] 阿部楽方：3種類のすぐれた方陣，別冊数理科学，パズルⅡ，1977年，サイエンス社
- [2] 平山諦，阿部楽方：方陣の研究，1983年，大阪教育図書
- [3] 大森清美：新編魔方陣，1992年，富山房
- [4] 内田伏一：魔方陣にみる数のしくみ，2004年，日本評論社
- [5] 大森清美：魔方陣の世界，2013年，日本評論社



## 山形大学紀要（自然科学）投稿規程

この規程は、山形大学紀要（自然科学）（以後「自然科学編」と略す）への投稿に必要な事項を定めるものである。

（2008年12月10日改訂）

1. 名称及び発行  
山形大学紀要（自然科学）〔Bulletin of Yamagata University (Natural Science)〕と称し、毎年1回、2月に図書館ホームページを通じて電子版で発行する。4号分をもって1巻とし、1巻毎に冊子体で保存版を発行する。
2. 投稿資格
  - (1) 「自然科学編」へ投稿できる者は、本学教職員であることを原則とする。ただし、停年退職した教員及び現在非常勤講師として本学に相当年数勤務し、編集委員会において適当と認めた者については、投稿を認める。
  - (2) 本学教職員以外の者との共同研究については、本学教職員が共同執筆者である場合に限り、投稿を認める。
  - (3) 本学の大学院学生及び大学院研究生で、編集委員会において適当と認めた者については、投稿を認める。
3. 投稿記事とその種類  
自然科学に関する記事で、「自然科学編」編集委員会が適当と認めたもの。その種類は次のとおりとする。なお、他誌との二重投稿は認めない。
  - (1) 原著論文
  - (2) 総説
  - (3) 資料
  - (4) その他（編集委員会が適当と認めたもの）
4. 使用言語及び版組  
和文または欧文とする。大きさはA4判とし、段組は横一段または横二段とする。
5. 原稿の制限
  - (1) 本文、図・表等を含めた刷り上がり総ページが、欧文21ページ、和文35ページ内とする。なお、図版や図・表の1つの大きさは、原則として1ページを超えないものとする。
  - (2) 前項の制限を超える原稿は、編集委員会が適当と認めた場合に限り、受理されることがある。
  - (3) カラー印刷等の特殊な印刷も可能とする。
6. 原稿の作成  
別に示す「紀要（自然科学）論文原稿作成上の注意」により作成する。
7. 原稿の提出
  - (1) 完成した原稿については、2部のコピーを作り、計3部を小白川キャ

ンパス事務部図書課総務担当に提出する。このとき、受付日・時間を明記した受領書を受け取る。

- (2) 「自然科学編」の原稿の受付けは常時行うが、各年度の原稿提出の区切りは、7月15日とする。

#### 8. 記事の掲載の可否

- (1) 原著論文については、編集委員会は2名の査読者に審査を依頼する。原著論文以外の記事については、編集委員会が必要と認めた場合は同様に審査依頼する。審査の結果必要ならば、編集委員会は原稿の修正等を求めることができる。
- (2) 掲載の可否は編集委員会が決定する。

#### 9. 校正

- (1) 校正は、著者の責任において2日以内に行い、再校までで校了するように努力すること。
- (2) 校正は、誤字、脱字等の訂正を原則とする。なお、大幅な訂正が不可欠な場合は、編集委員会の許可を得るものとし、それに伴う経費は著者負担とする。
- (3) 冊子、表紙、標題、著者名、号巻数、および柱（欄外見出し）などの体裁に関する部分は、編集委員会の責任において調整する。

#### 10. 掲載の経費及び別刷りについて

- (1) 掲載に要する経費は、制限内のページ数であれば、原則として無料とする。
- (2) 別刷り100部までは無料とする。ただし、予算額に不足が生じた場合は、著者の負担とする。
- (3) 制限ページを超過した場合の印刷経費、及びカラー印刷等の特殊な印刷に要する経費は、原則として著者の負担とする。

#### 11. 著作権等

論文を投稿する者は、山形大学に対して、当該論文に関する著作権を設定する。

また、論文等はすべて電子化し、図書館ホームページ及び機関リポジトリを通じてコンピュータ・ネットワーク上に公開する。このため、論文を投稿する者は、山形大学に対し、当該論文に関する複製及び公衆送信を行うことを許諾するものとする。

#### 附 則

この投稿規程は平成20年12月10日から施行し、平成20年7月1日から適用する。

#### 附 則

この投稿規程は平成21年10月29日から施行し、平成21年10月1日から適用する。

#### 附 則

この投稿規程は平成23年4月26日から施行し、平成23年4月1日から適用する。

#### 附 則

この投稿規程は平成23年9月26日から施行する。

#### 附 則

この投稿規程は平成24年4月19日から施行する。

## 紀要（自然科学）論文原稿作成上の注意

- I. 原稿の記述は表題、執筆者名、欧文要旨（Abstract）、本文および文献の順序とする。執筆者の所属は第1ページの脚注に記述する。（IV. 4）参照
  - 1) 和文の場合  
電子機器を用いて作成する場合は、A4判、横書き（40字×40行）で、手書きの場合は山形大学紀要規定の原稿用紙を用いること。文章は新しい国語表記により、できるだけ常用漢字を使用する。欧文要旨は本文の前に記載し、10ないし20行程度以内にまとめ、Abstractという見出しをつける。
  - 2) 欧文の場合  
A4判用紙の片面に、周囲約3cmの空白を残して2段送りにプリントすること。欧文要旨は本文の前に記載し、10ないし20行程度以内にまとめAbstractという見出しをつける。ただし執筆者の希望によっては、欧文要旨はつけなくてもよい。
  
- II. 原稿には表紙をつけ、それに投稿する紀要名（自然科学）、論文表題、執筆者名、所属、欄外見出し用の略題（和文：30字以内、欧文：スペースを入れて60字以内）、原稿枚数（表紙を除く）、また表、図がある場合はそれらの枚数を列記する。なお手書きの場合、使用する特殊な活字・字体（ギリシャ文字、ドイツ文字、イタリック、ローマン等）があるときはその旨付記すること。  
表紙をつけた論文原稿（オリジナル）とそのコピー2部を作成すること。
  
- III. 表および図について
  - 1) 表および図は、一つずつ必ず別紙に、直接版下として使用できる品質で描くこと。各葉に表または図の説明をつけ、第○表、第○図、執筆者名を付記すること。
  - 2) 図面の大きさは刷り上がり寸法の1.5～3倍とし、それぞれ希望縮尺を記入すること。
  - 3) 方眼紙を用いる場合は、淡青色のものに限る。
  - 4) 本文中の原稿用紙の右側余白に、その図および表のはいる箇所を赤色の字で記入すること。
  
- IV. 文献について
  - 1) 文献の記述は次の形式とする。雑誌は、執筆者名、表題（省略可）、雑誌名、巻数または号数、ページ、発行年を記載する。単行本は、執筆者名、題目、発行所名、発行場所、発行年を記載する。
  - 2) 雑誌の略記は学会の慣例などによること。
  - 3) 文献の引用記号は、自由形式とするが、通し番号の場合もそうでない

場合もいずれも [ ] で表す。

(例 1)

[1] 伊藤昭, 密度効果とこみあい効果, 生物科学, 25, 35-42, 1973.

[2] B. Maskit, Decomposition of certain Kleinian groups, Acta Math., (302), 43-263, 1973.

[3] 朝永振一郎, 量子力学, みすず書房, 東京, 1965.

(例 2)

[LOP47] C.M.G. Latters, G.P.S. Occhialini, and C.F. Powell, Nature 160, 453-455, 1947.

[Weh73] B.A.F. Wehrfritz, In nite Linear Groups, Springer, Berlin, 1973.

(例 3)

[Davis 1983] Davis, J.H., Biochim. Biophys. Acta, 737, 117, 1983.

[Janiak et al. 1979] Janiak, M.J., D.M. Small and G.G. Shipley, J. Biol. Chem., 254, 6068, 1979.

- 4) 文献でない備考・注などは、\*、\*\*などを右肩につけ説明を脚注としその原稿用紙の下部に書くこととするが、本文中の脚注による記述は可能な限りさけること。

#### V. 最終原稿の調整

- 1) 掲載が決定した原稿は、フロッピーディスクに記録して提出することができる。
- 2) 印刷にそのまま使用する版下を作成し、提出することもできる。ただし、編集委員会において、印刷後の体裁・品質等が従来の印刷と比べて同等と認められるものに限る。

山形大学紀要（自然科学）編集委員会

委員 渡邊明彦 ※

委員 奥間智弘

委員 奥野貴士

※ 編集責任者

平成 27 年 2 月 10 日 印刷

平成 27 年 2 月 15 日 発行

編集者  
発行者

山 形 大 学

山形市小白川町 1 丁目 4 - 12

印刷所

仙台市青葉区木町通 2 丁目 5 - 24  
遠山青葉印刷株式会社



**BULLETIN**  
**OF**  
**YAMAGATA UNIVERSITY**

Vol. 18 No. 2

---

CONTENTS

Fuichi UCHIDA : On special compact magic squares of order  $4m$  ..... (19)

---

Published by  
YAMAGATA UNIVERSITY, YAMAGATA, JAPAN  
FEBRUARY 2015

**リサイクル適性** (A)

この印刷物は、印刷用の紙へ  
リサイクルできます。